



AUFGABE ZUM TECHMAX 12

ZURÜCK ZUM URKNALL – WIE TEILCHENPHYSIKER MIT DEM LHC AUF ZEITREISE GEHEN

Positronen-Emissions-Tomografie (PET)

Bei der Positronen-Emissions-Tomografie handelt es sich um ein bildgebendes Verfahren in der Medizin. Dabei wird ein β^+ -Strahler mit einer Trägersubstanz in den Körper injiziert. Diese sammelt sich dann in Tumorzellen an, wo die radioaktiven Nuklide zerfallen.

Kernphysik:

Isotop	Halbwertszeit	Atommasse
^{11}C	---	11,01143260 u
^{15}O	2,03 min	15,0030656 u
^{18}F	110 min	18,0009372 u

Genutzt werden häufig Isotope mit den in der Tabelle dargestellten Halbwertszeiten:



- Stellen** Sie den radioaktiven Zerfall von ^{11}C in einer Zerfallsgleichung und im Potentialtopfmodell des Atomkerns **dar**.
- Berechnen** Sie die dabei freiwerdende Energie und begründen Sie, dass die emittierten Positronen diese Energie nie komplett tragen.
- Diskutieren** Sie die Nutzung von ^{18}F gegenüber ^{15}O hinsichtlich deren Halbwertszeiten. (Tatsächlich werden die Elemente danach ausgewählt, in welche Moleküle sie eingebaut werden können und wo sich diese Moleküle im Körper anreichern.)
- Zeichnen** Sie die Zerfallskurve von ^{18}F anhand von mindestens drei berechneten Punkten. Gehen Sie dabei davon aus, dass zu Beginn eine Menge vorhanden war, die pro Sekunde 20 Millionen Zerfälle durchläuft.

In Abb. A ist die Zerfallskurve von ^{11}C während der ersten 10 Minuten dargestellt. **Bestimmen** Sie die fehlende Halbwertszeit möglichst genau.



Abb. A: Zerfallskurve © B. Müller / CC BY-NC-SA 4.0

Elementarteilchenphysik:

Das Prinzip der PET basiert auf der Messung zweier Photonen im Detektorring um den Patienten, die durch dieselbe Elektron-Positron-Annihilation entstehen (s. Abbildung B).

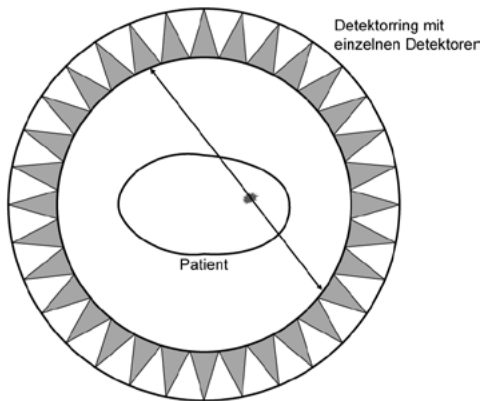


Abb. B: Prinzip PET © B. Müller / CC BY-NC-SA 4.0

Standard-Modell der Elementarteilchen					
Drei Generationen der Materie (Fermionen)			Wechselwirkungen (Bosonen)		
	I	II	III		
Masse	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$
Ladung	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
QUARKS	u Up	c Charm	t Top	g Gluon	H Higgs
	d Down	s Strange	b Bottom	γ Photon	
LEPTONEN	e Elektron	μ Muon	τ Tau	Z Z-Boson	
	ν_e Elektron-Neutrino	ν_μ Muon-Neutrino	ν_τ Tau-Neutrino	W W-Boson	
				EICHBOSONEN VEKTORBOSONEN	SKALARBOSONEN

Abb. C: Elementarteilchen (Ausschnitt); gemeinfrei



1. **Erläutern Sie**, weshalb zwei Photonen entstehen und wie die beiden dazu genutzt werden können, um deren Ursprungsort genau zu bestimmen.
2. Der Positron-Emissions-Tomograf kann die „richtigen“ Photonen von zufällig im Detektor gemessenen Photonen z.B. anhand deren Energie bestimmen. **Berechnen Sie** sie!
3. „Statt einer Elektron-Positron-Annihilation könnte man auch die Vernichtung anderer Quantenobjekte nutzen.“ **Beurteilen Sie** diese Behauptung.

LÖSUNGEN:

Kernphysik:

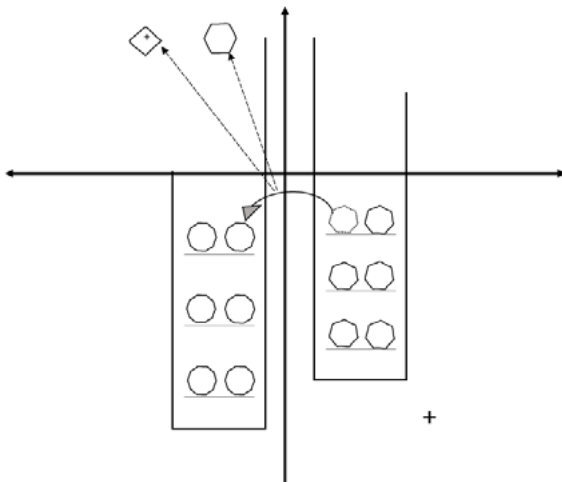
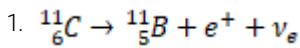


Abbildung D1: Darstellung des Zerfallsprozesses ohne Beachtung der schwachen Wechselwirkung

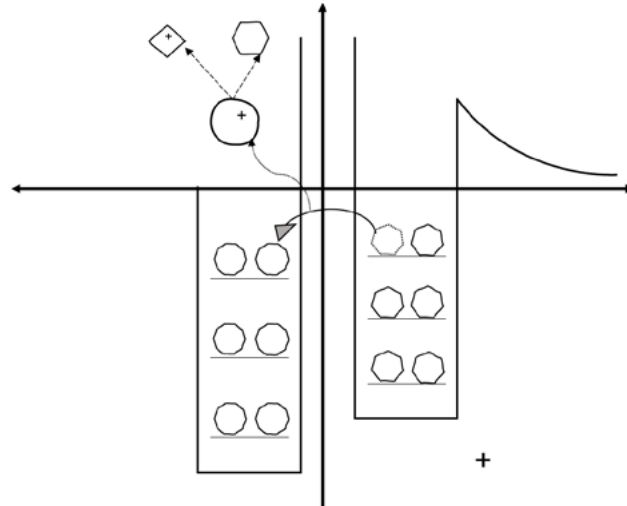


Abbildung D2: Darstellung des Zerfallsprozesses mit Beachtung der schwachen Wechselwirkung

2. Atommasse von ${}^{11}_5\text{B}$: $m_{{}^{11}_5\text{B}} = 11,009305(3) \text{ u}$

(ggf. muss dieser Wert den SchülerInnen im Vorhinein mitgeteilt werden)

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (m_{{}^{11}_6\text{C}} - m_{{}^{11}_5\text{B}} - m_e) c^2 = 1,5787 \cdot 10^{-3} \text{ u} \cdot c^2 = 2,6215 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot c^2 \\ = 2,35611 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,471 \text{ MeV}$$

Ein Teil der Energie wird vom Neutrino getragen.

3. Elemente mit längeren Halbwertszeiten wie Fluor verteilen ihre Zerfälle auf eine längere Dauer. Dadurch sind sie schwieriger zu messen, belasten das umliegende Gewebe aber weniger pro Zeiteinheit. Möchte man die niedrigere Aktivität durch eine höhere Dosis kompensieren, erhält man das Problem, dass aufgrund der längeren Halbwertszeit die Gesamtdosis der Strahlung bei Fluor höher als bei Sauerstoff wäre. Zu betrachten sind dabei auch die biologischen Halbwertszeiten der Trägermoleküle. Dieser Wert gibt an, nach welcher Zeit nur noch die Hälfte der Substanz im Körper nach Ausscheidung zurückbleibt. Bei diesen kurzen radioaktiven Halbwertszeiten sind die biologischen unter Beachtung der eigentlichen Aufgabe der Trägersubstanz (Anreicherung im Tumorgewebe) aber wahrscheinlich weniger relevant.

4. Bei einer Halbwertszeit $\tau_{1/2}$ von 110 Minuten muss zunächst ausgerechnet werden, wie viele Zerfälle pro Kern pro Sekunde (im Mittel) stattfinden. Das entspricht der Zerfallskonstante λ .

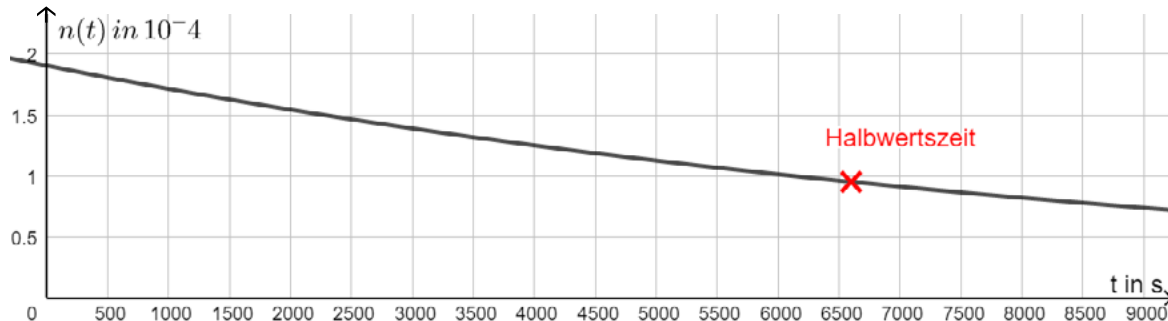
$$\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau_{1/2}} = 1,0502 \cdot 10^{-4} / \text{s}$$

Damit ergibt sich die Ursprungsmenge auf $n_0 = \frac{20 \cdot 10^6}{\lambda} = 1,9044 \cdot 10^{11}$ Kerne mit einer Masse von

$$M_0 = n_0 \cdot m_{{}^{18}\text{F}} = 5,6925 \cdot 10^{-15} \text{ kg}.$$

Die zeitlich abhängige Menge an Fluor-18 während des Zerfallsprozesses berechnet sich mit:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$



5. Die Vorgehensweise kann hier unterschiedlich sein: In jedem Fall werden einige Punkte abgelesen. Damit kann man nun verschieden umgehen:
- Einsetzen in die Zerfallsgleichung von 2 Punkten
 - Exponentielle Regression mit einem technischen Hilfsmittel, z.B. Taschenrechner
 - Neuzeichnen der abgelesenen Punkte bei logarithmischer Skala und Bestimmung der Steigung

In allen Fällen sollte eine Halbwertszeit von etwa $\tau_{1/2} = 20,4 \text{ min}$ herauskommen.

Es bietet sich ggf. eine Diskussion über die Verfahren an.

Elementarteilchenphysik:

- Bei der Annihilation wird die in der Masse vorliegende Energie des Positrons und des Elektrons frei. Aus dieser Energie werden zwei Photonen erzeugt, die in genau die entgegengesetzte Richtung propagieren (bis auf einen ggf. vorher vorhandenen Anfangsimpuls von Positron und Elektron). Beide Photonen haben dieselbe Wellenlänge, denn sie müssen den gleichen Impulsbetrag tragen, damit sich ihre Impulse gemäß der Impulserhaltung aufheben. Auf Basis der Zeitdifferenz zwischen den Messungen der Photonen in den beiden gegenüberliegenden Detektoren kann zurückgerechnet werden, an welcher Stelle sie erzeugt wurden, also wo die Annihilation stattfand. Ohnehin ist der Ort der Annihilation auf der Verbindungsstrecke der beiden Detektoren. Da das Gewebe sehr dicht mit Elektronen gefüllt ist, kann man von einer sehr geringen zurückgelegten Weglänge des Positrons vor der Annihilation ausgehen. Damit ergibt sich der Ort der Annihilation als ausreichend gute Näherung des Ortes Tumorgewebes.
- Vernachlässigt man die Bewegungsenergie von Elektron und Positron (die Elektronen „ruhen“ in den Atomhüllen des Gewebes, die Positronen werden durch Stöße abgebremst), so ergibt sich die Gesamtenergie der beiden Photonen aus den Ruhemassen von Elektron und Positron:

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_e \cdot c^2 = 511 \text{ keV}$$

- Prinzipiell stimmt diese Behauptung, da die Annihilation entsprechend stattfindet. Doch die Umsetzung gestaltet sich als (im Vergleich zur Nutzung von Positronen) zur schwierig. Zunächst würde man etwas benötigen, dass Antimaterie erzeugt. Es muss Antimaterie sein, da der umliegende Körper keine eigene Antimaterie zur möglichen Annihilation mit Materie bereithält. Nun stellt sich die Frage, welche

Teilchen das sein könnten: Alle anderen Leptonen (außer den Neutrinos, die ihre eigenen Antiteilchen sind) sind erstens instabil und zweitens wesentlich Massereicher als Elektronen. Das bedeutet, dass zu den entsprechenden Antiteilchen gar keine Teilchen im Körper vorhanden wären. Und wenn doch, dann wäre die erzeugte Strahlung energiereicher. Letztendlich zerfallen alle infrage kommenden Leptonen zu Elektronen. Da dabei aber Weglängen in verschiedene Richtungen zurückgelegt werden, ließe sich keine Rückverfolgung zum Erzeugungsort vollziehen.

Anti-Quarks kommen außer ihrer fraglichen Erzeugung auch nicht in Betracht: Aufgrund des Confinements würden sie nur in Mesonen oder Baryonen auftauchen. Und abgesehen von den eventuellen Zerfällen der Partner der betrachteten Anti-Quarks stellt sich das Problem, dass hier die Ruhemassen der Hadronen wesentlich höher als die der Elektronen sind. Entsprechend wäre die Strahlung auch wesentlich härter.

QUELLEN- UND ABBILDUNGSNACHWEISE:

Abb. A: Abb. A: Zerfallskurve © B. Müller / CC BY-NC-SA 4.0

Abb. B: Prinzip PET © B. Müller / CC BY-NC-SA 4.0

Abb. C: Verändert nach Standard-Modell der Elementarteilchen  Public domain, Wikimedia Commons;
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg

Ab. D1 und D2: Zerfallsprozesse © B. Müller / CC BY-NC-SA 4.0

Der Text wird unter [CC BY-NC-SA 4.0](#) veröffentlicht.

Stand 12/2020; Text: B. Müller; Layout und Redaktion: max-wissen-Team